Définition

On appelle corps des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant IR tel que :

- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + bi$, où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Définition

Soit z un nombre complexe.
L'écriture $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
a est appelé partie réelle de z, et b partie imaginaire de z. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Propriété :

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a :

$$a + bi = a' + b'i \iff (a\,;b) = (a'\,;b') \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

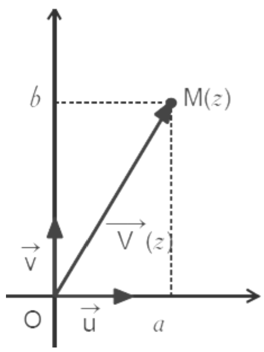
4.1. Définition

Soient a et b deux nombres réels.

Le nombre complexe conjugué de $Z = a + b\mathbf{i}$ est le nombre complexe $\overline{Z} = a - b\mathbf{i}$.

Définition

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Au point M de coordonnées $(a\,;b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
On dit que $z = a + bi$ est l'affixe de M ou que
$M(a\,;b)$ est l'image ponctuelle de $z = a + bi$.

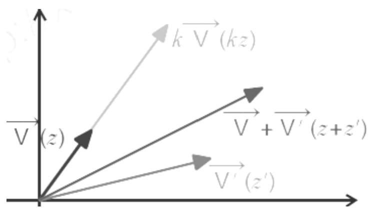


Au vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $(a\,;b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est l'affixe de $\overrightarrow{V}$ ou que
$\overrightarrow{V}(a\,;b)$ est l'image vectorielle de $z = a + bi$.

Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormé direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Propriété :



Si $\overrightarrow{V}$ a pour affixe z et $\overrightarrow{V'}$ pour affixe z',
alors $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}$ a pour affixe $z + z'$.
Si k est un réel, alors $k\overrightarrow{V}$ a pour affixe kz.

6.1. Forme trigonométrique

L'écriture $\boxed{Z = a + bi}$ s'appelle **la forme algébrique** de Z (ou encore **forme cartésienne**).

Or, nous avons vu (paragraphe 5) que $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$ où $r = |Z|$ et $\theta = \arg(Z)$. Le nombre complexe Z peut donc s'écrire : $\boxed{Z = r\,(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))}$; cette écriture s'appelle **une forme trigonométrique** de Z.

6.5. Définition

Pour tout réel θ, on note $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)$.

$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ désigne donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}| = 1$ et $\arg(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \theta \ [2\pi]$.

Exemples : $\mathbf{e}^{\mathbf{i}0} = 1$; $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \mathbf{i}$; $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = -1$; $\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi} = 1$; $\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathbf{i}$.

Un nombre complexe de module r et d'argument θ s'écrit alors $\boxed{Z = r\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}$.

Cette écriture est appelée **une forme exponentielle** de Z.

6.8. Théorème : pour tous θ et θ' de $\mathbb{R}$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \times \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} \qquad \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(\theta-\theta')} \qquad \left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

7. Formules de Moivre. Formules d'Euler[1]

7.1. Théorème

Formules de Moivre : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta) \qquad (\cos(\theta) - \mathbf{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - \mathbf{i}\sin(n\theta)$$

Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2}$ $\qquad \sin(\theta) = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}$

5.2. Remarques :

- $|Z| \geqslant 0$ pour tout nombre complexe Z.
- $|Z| = 0$ équivaut à $Z = 0$.
- On a également (d'après le théorème 4.6.) $|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}}$ ou encore $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.
- Si $Z = a + b\mathbf{i}$ est réel ($b = \mathrm{Im}(Z) = 0$), on a $|Z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.
- Le module de $Z = a + b\mathbf{i}$ est toujours supérieur à $\max(|a|, |b|)$. En effet :

$$a^2 + b^2 \geqslant a^2 \text{ et } a^2 + b^2 \geqslant b^2$$

Et par passage à la racine carrée : $|Z| \geqslant |a|$ et $|Z| \geqslant |b|$

D'où : $|Z| \geqslant \max(|a|, |b|)$

1ère série de TD D'électrotechnique fondamentale1

Exercice 01

Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$.
Calculer et écrire sous la forme algébrique $z + z'$; $z - z'$; $2z - 3z'$; $z.z'$

Exercice 02

1°) Calculer $(3 + 2i)(3 - 2i)$. En déduire la forme algébrique de $\frac{1}{3 + 2i}$.

2°) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes : $\frac{1}{1 + i}$; $\frac{1}{3 - i}$; $\frac{1}{i}$.

Exercice 03

Ecrire sous la forme exponentielle les nombres z = 1+i, et $\bar{z}$

Exercice 04

Mettre sous forme exponentielle et placer les nombres complexes ci-dessous:

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$

$z_2 = 1 + i$

$z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

Exercice 05

Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$; $z_5 = i$

$z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$; $z_9 = 2z_1 - 3z_2$; $z_{10} = z_3(z_4 - z_2)$

Exercice 06

Étant donné un point M d'affixe $z = a + bi$, avec a et b réels.

Placer
- le point M' d'affixe $z' = a - bi$,
- le point M'' d'affixe $z'' = -a + bi$,
- le point M''' d'affixe $z''' = -a - bi = -z$.

Exercice 07

Utilisant la formule de Moivre, calculer $cos3\theta$ et $sin3\theta$

Exercice 08

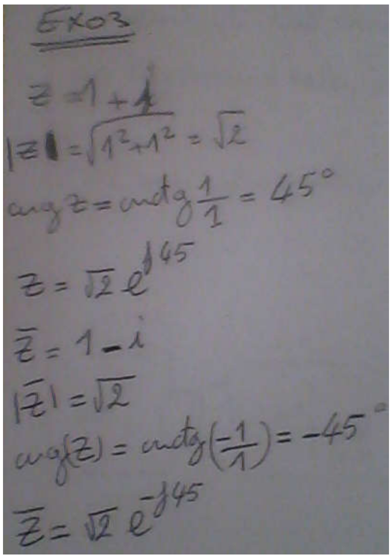
Soit $z = 4+3i$,

Ecrire z sous la forme trigonométrique et exponentielle.

Calculer z^2, en déduire z^3.

Généraliser pour z^n.

solution exercice 3


Exo3

$z = 1 + i$

$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg z = \text{arctg}\,\frac{1}{1} = 45°$

$z = \sqrt{2}\, e^{j45}$

$\bar{z} = 1 - i$

$|\bar{z}| = \sqrt{2}$

$\arg(\bar{z}) = \text{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = -45°$

$\bar{z} = \sqrt{2}\, e^{-j45}$

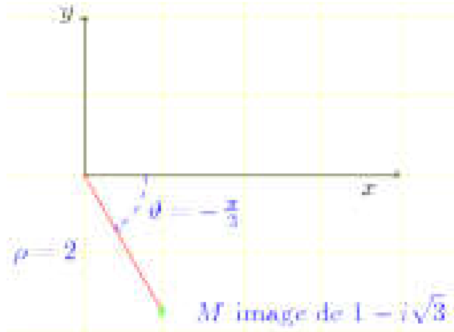
solution exercice 4

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$

$|z_1| = 2$

$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_1 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$



%%

$z_2 = 1 + i$

$|z_2| = \sqrt{2}$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

solution exercice3

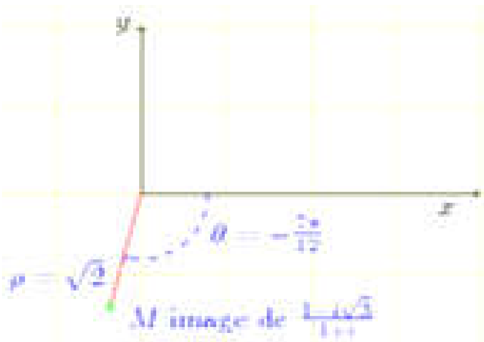
$z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

$z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

$|z_3| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}$

$arg(z_3) = arg(z_1) - arg(z_2) = -\frac{7\pi}{12}$

$z_3 = \sqrt{2}\left(e^{-\frac{i7\pi}{12}}\right)$



solution exercice6

Calcul de

$\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$

$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3=\cos^3(\theta)+3i\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta)$

On en déduit

$$\cos(3\theta)=\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$$
$$\sin(3\theta)=3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)$$

solution exercice7

Formule de Moivre

$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$ $\qquad (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

$\cos(n\theta)=Re(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n$

$\sin(n\theta)=Im(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n$

EXO 07

Calculer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$

Moivre

$(\cos\theta+j\sin\theta)^3=\cos 3\theta+j\sin 3\theta$

$\Rightarrow \cos 3\theta = Re\left[(\cos\theta+j\sin\theta)^3\right]$

$\sin 3\theta = Im\left[(\cos\theta+j\sin\theta)^3\right]$

$(\cos\theta+j\sin\theta)^3=(\cos\theta+j\sin\theta)(\cos\theta+j\sin\theta)^2$

$=(\cos\theta+j\sin\theta)(\cos^2\theta+j2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^3\theta+2j\cos^2\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^2\theta+j\sin\theta\cos^2\theta$

$-2\sin^2\theta\cos\theta-j\sin^3\theta$

$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-j(\sin^3\theta-3\sin\theta\cos^2\theta)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\\ \sin 3\theta=3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta\end{cases}}$$

EXO 08

$z=4+3i$

$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$\arg(z)=\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)=36{,}86=\theta$

$\Rightarrow \sin\theta=0{,}6$

$\cos\theta=0{,}8$

$z=5(\cos\theta+j\sin\theta)$

$z=5\,e^{j\theta}$

$z^2=25(e^{j\theta})^2=25e^{j2\theta}$

$z^2=25(\cos 2\theta+j\sin 2\theta)$

$z^3=(5)^3e^{j3\theta}$

$z^3=(5)^3(\cos 3\theta+j\sin 3\theta)$

$z^n=|z|^n e^{jn\theta}$

$z^n=(|z|)^n(\cos n\theta+j\sin n\theta)$

Régime alternatif sinusoïdal

Un signal alternatif est un signal qui n'admet pas de composante continue (sa valeur moyenne est nulle : $\langle u(t) \rangle = 0$*), en effet son expression s'écrit sous la forme :*

$x(t) = X_m \sin(\omega t+\phi)$ *avec :*

- X_m *: amplitude du signal (grandeur positive).*
- $(\omega t + \phi)$ *: la phase.*
- ω *: la pulsation .*
- ϕ *: La phase à l'origine, c'est à dire la phase pour* $t = 0$

Amplitude complexe, Impédance et admittance complexes

Amplitude complexe

Soit un signal sinusoïdal d'amplitude X_m *et de pulsation* ω*, c'et à dire* $x(t) = X_m \cos(\omega t+\phi)$ *:*

A ce signal on peut lui associer :

- *Un vecteur tournant de norme* X_m *et d'angle* $\theta = \omega t + \phi$*: représentation de* ***Fresnel****.*
- *Un nombre complexe de module* X_m *et d'argument* ϕ*: représentation complexe.*

La notation complexe consiste à associe à une fonction sinusoïdale un nombre complexe :

$$\boxed{\underline{x}(t) = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}}$$

On rappelle que pour un signal sinusoidal : $X_e = \dfrac{X_m}{\sqrt{2}}$ *: valeur efficace.*

On pose :

$$\boxed{\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \Longrightarrow \underline{X}e = X_e e^{j\varphi}}$$

On conclut que :

$$\boxed{X_e = |\underline{X}e| \quad || \quad X_m = |\underline{X}_m| \quad || \quad \varphi = \arg \underline{X}_m = \arg \underline{X}_e}$$

Dérivation :

$$\boxed{\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}(t)}$$

Dériver par rapport à t en notation réelle revient à multiplier par (jω) en notation complexe

Intégration :

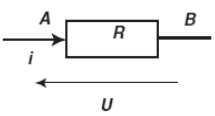
$$\boxed{\int \underline{x}(t)dt = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)}$$

Intégrer par rapport à t en notation réelle revient à multiplier par $(\frac{1}{j\omega})$ ***en notation complexe***

5.1.2 Impedance complexe et admittance complexe :

5.1.2.1 Définitions :

Soit un dipole linéaire AB ;



$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{i} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ *avec* $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$

Puisque le dipole est linéaire alors la tension $u(t)$ est sinusoidal ***de même pulsation*** ω
$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \rightarrow \underline{u} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$ *avec* $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$
On appelle impedance complexe

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e}}$$

$$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi}$$

$$\boxed{Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} \quad (\Omega) \qquad \| \qquad \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arg \underline{Z}}$$

φ étant le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$

On appelle admittance complexe (S) :

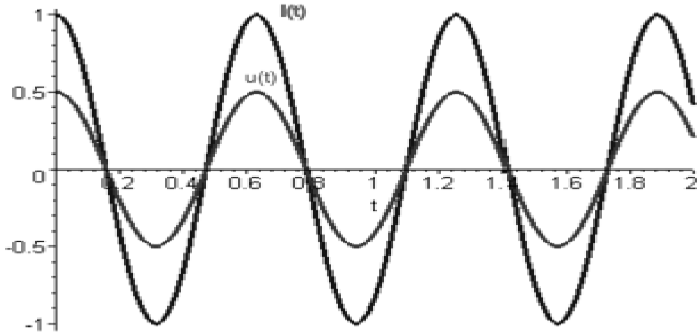
$$\boxed{\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{I_m}{U_m} e^{-j\varphi}}$$

5.1.2.2 Applications :

5.1.2.2.1 Impedance d'un resistor :

$u = Ri \Longrightarrow \underline{U}_m = R\underline{I}_m \Longrightarrow$

- $\boxed{\underline{Z}_R = R}$
- *$u(t)$ et $i(t)$ sont en phase*
- $\varphi_R = 0$

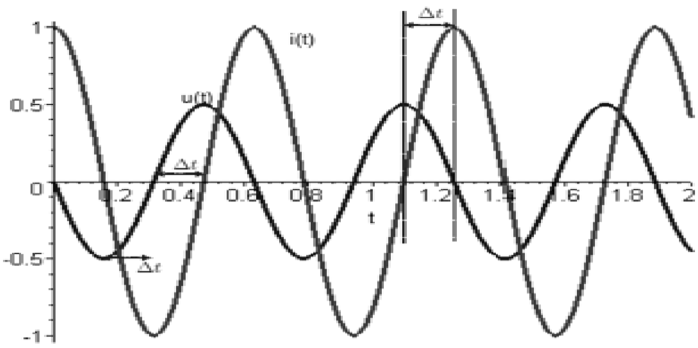


5.1.2.2.2 Impedance d'une bobine idéale :

$u = L\dfrac{di}{dt} \Longrightarrow \underline{U}_m = jL\omega \underline{I}_m \Longrightarrow$

$$\boxed{\underline{Z}_L = jL\omega}$$

- $\boxed{Z_L = L\omega \quad ; \quad \varphi_L = +\pi/2}$



- $\varphi_L > 0 \Longrightarrow u(t)$ *est en quadrature avance par rapport à $i(t)$*
- $\varphi_L = \pi/2 \Longrightarrow \Delta t = T/4$

5.1.2.2.3 Impedance d'un condensateur :

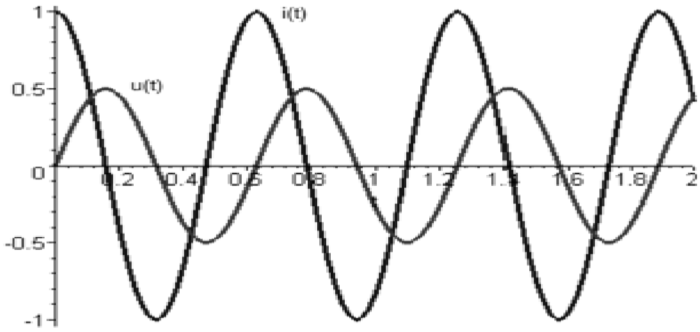
$$u = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Longrightarrow \underline{U}_m = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}_m \Longrightarrow$$

$$\boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}}$$

•

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{C\omega} \quad ; \quad \varphi_C = -\pi/2}$$

- $\varphi_C < 0 \Longrightarrow u(t)$ *est en quadrature retard par rapport à* $i(t)$
- $|\varphi_C| = \pi/2 \Longrightarrow \Delta t = T/4$



Puissance en régime alternatif sinusoïdal

Nous savons que la **puissance électrique** d'un appareil est égale à **l'énergie électrique** produite ou consommée par cet appareil en un temps donné.
En régime alternatif sinusoïdal, la tension et le courant varient dans le temps.
On peut définir une **puissance instantanée**, puissance à un instant donné,
La puissance instantanée s'écrit avec la lettre symbole p minuscule et s'exprime en watts.
La puissance instantanée varie dans le temps

$$\underset{(W)}{\mathbf{p}} = \underset{(V)}{\mathbf{v}} \cdot \underset{(A)}{\mathbf{i}}$$

D'autre part nous avons vu qu'en fonction du récepteur, la tension et le courant peuvent être en phase ou parfois déphasés l'un par rapport à l'autre. Nous devons donc prendre en compte le déphasage pour déterminer la puissance mise en jeu dans un récepteur.

Puissance active

La **puissance active notée P** est la valeur moyenne de la puissance instantanée.
Elle est donnée par la relation ci contre dans laquelle
V est la valeur efficace de la tension
I est la valeur efficace de l'intensité du courant
Φ est le déphasage du courant par rapport à la tension

$$\underset{(W)}{\mathbf{P}} = \underset{(V)}{\mathbf{V}} \cdot \underset{(A)}{\mathbf{I}} \cdot \cos\varphi$$

La puissance active est la puissance consommée par l'utilisateur et, qui lui est facturée par SONELGAZ sous la forme d'énergie en kW/h.

Puissance réactive

La **puissance réactive notée Q** est la puissance mise en jeu dans les dipôles réactifs.
Elle est due à la réactance et s'exprime en VAr (Volt Ampère réactif)

$$\underset{(VAr)}{\mathbf{Q}} = \underset{(V)}{\mathbf{V}} \cdot \underset{(A)}{\mathbf{I}} \cdot \sin\varphi$$

Puissance apparente

La **puissance apparente notée S** est la puissance qui caractérise le générateur source de tension et de courant alternatif. Quand on met à disposition une source d'énergie électrique alternative, on ne connaît pas l'utilisation qui sera faite par l'utilisateur et donc on ne connaît pas le déphasage entre le courant et la tension. $\underset{(VA)}{\mathbf{S}} = \underset{(V)}{\mathbf{V}} \cdot \underset{(A)}{\mathbf{I}}$ Par contre, il est nécessaire de connaître la tension et l'intensité disponible.

Dans un montage, la puissance apparente totale est la somme vectorielle des puissances apparentes de chaque récepteur.

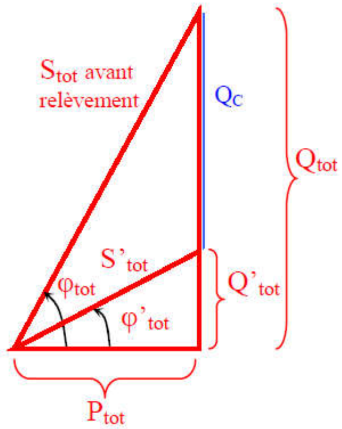
Facteur de puissance

Nous venons de voir que la **puissance active** est donnée par la relation : **P = V . I . cosφ** et que la **puissance apparente** est donnée par la relation : **S = V . I**
Donc : **P = S. cosφ**
Le rapport de la puissance active sur la puissance apparente est appelé **le facteur de puissance** $\cos\varphi = \underset{(W)}{\mathbf{P}} / \underset{(VA)}{\mathbf{S}}$ ou cosφ et n'a pas unité.

Triangle des puissances

De la même façon que nous avons défini le triangle des impédances nous pouvons tracé le **triangle des puissances** :

Théorème de BOUCHEROT



Puissance active totale :	$P_{tot} = \Sigma P = R_{tot} . I^2$
Puissance réactive totale :	$Q_{tot} = \Sigma Q = X_{tot} .I^2 = P_{tot}\ tg\varphi$
Puissance apparente totale :	$S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2} = Z_{tot} . I^2$
Facteur de puissance :	$\cos\varphi = \dfrac{P_{tot}}{S_{tot}}$

Relèvement du facteur de puissance

Le relèvement du facteur de puissance consiste à diminuer le déphasage φ_{tot} pour augmenter $\cos\varphi_{tot}$
Pour cela il faut que le montage fournisse plus de puissance réactive.
Il convient donc d'augmenter Q_C en rajoutant des condensateurs.
Avant relèvement : on a $Q_{tot} = P_{tot}\ tg\varphi_{tot}$ et $S_{tot} = V . I_{tot}$
Après relèvement : on veut $Q'_{tot} = P_{tot}\ tg\varphi'_{tot}$ et $S'_{tot} = V . I'_{tot}$
Il faut donc **fournir** $Q_C = Q_{tot} – Q'_{tot} = P_{tot} (tg\varphi_{tot} – tg\varphi'_{tot})$
Or un condensateur de capacité C soumis à une tension V fournit une puissance réactive $Q_C = I^2 / C\omega = V^2.C\omega \rightarrow C = Q_C / V^2.\omega$
La capacité s'exprime en Farad ou en microfarad μF

$$\mathbf{C = \frac{P_{tot}\ (tg\varphi_{tot} - tg\varphi'_{tot})}{V^2.\omega}}$$

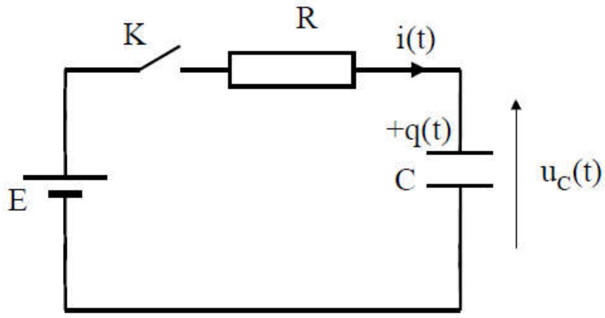
Régimes transitoires. Régimes forcés

1 Charge/Décharge d'un condensateur à travers une résistance

1.1 Charge

Soit le circuit donné ci-dessous :

Initialement le condensateur ne porte aucune charge $Q_0 = 0$. A l'instant t=0 on ferme l'interrupteur K. La source de tension continue E est alors connectée aux bornes du circuit RC série.



Pendant la charge, le courant contribue à augmenter la charge de la plaque positive du condensateur. On a donc, avec les conventions choisies sur la figure, la relation suivante : $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$.

La loi d'Ohm instantanée s'écrit : $E = R\,i(t) + \frac{q(t)}{C}$

Soit, en exprimant i(t) et q(t) en fonction de $u_C(t)$:

$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}}$, équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

La solution générale $u_C(t)$ de cette équation est égale à la somme de la solution $u_{C0}(t)$ de l'équation sans second membre (ESSM) plus une solution particulière $u_{C1}(t)$ de l'équation avec second membre (EASM). La constante d'intégration sera déterminée par les conditions initiales.

ESSM : $\dot{u}_C + \frac{1}{RC}u_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du_C}{u_C} = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad u_{C0} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$

EASM : Comme le 2nd membre est constant, la solution particulière est à chercher sous forme d'une constante, d'où : $u_{C1} = E$

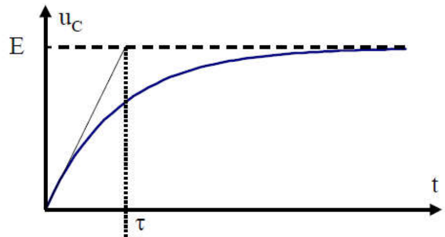
La solution générale est donc : $u_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{RC}}$

Les conditions initiales (à t=0, q=0 et donc u_C=0) permettent de déterminer la constante A :
$u_C(t=0) = 0 = E + A \quad \Rightarrow \quad A = -E$.

La tension aux bornes du condensateur est donc donné par : $\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$

On en déduit le courant : $\boxed{i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}}$

la grandeur $\boxed{\tau = RC}$ est homogène à un temps. Elle est appelée **constante temps** (en s)



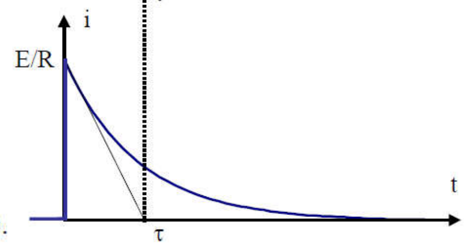
Tracé de la courbe : $u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

1 / Pente à l'origine : $\left.\frac{du_C}{dt}\right]_{t=0} = \left.\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}\right]_{t=0} = \frac{E}{\tau}$

doù l'équation de la tangente à l'origine : $u_C(t) = \frac{E}{\tau}t$

2 / Asymptote : pour t → ∞, $u_C(t) = E$

3 / Intersection des deux droites précédentes : c'est le point (τ ; E).



<u>2ième série de TD D'électrotechnique fondamentale1</u>

Exercice 1

Une source de tension sinusoïdale de valeur maximale 120 V et de fréquence 50 Hz est appliquée a une résistance de 50 Ω. Calculer :

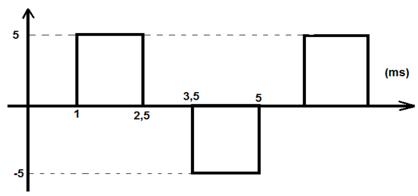
a) la valeur efficace de la tension

b) la valeur efficace du courant

c) la puissance dissipée par la résistance

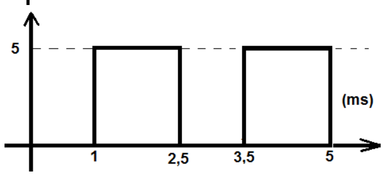
Exercice 2

Calculer la valeur moyenne et efficace du signale suivant :



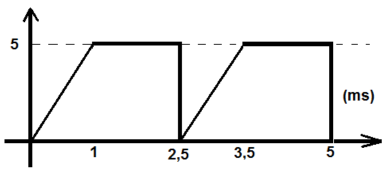
Exercice 3

Calculer la valeur moyenne et efficace du signale suivant :



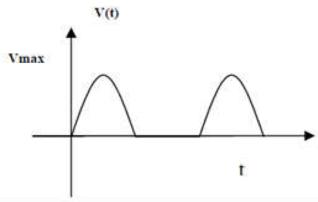
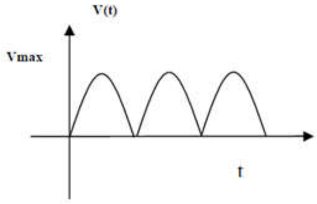
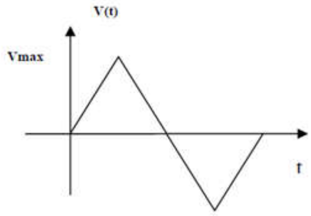
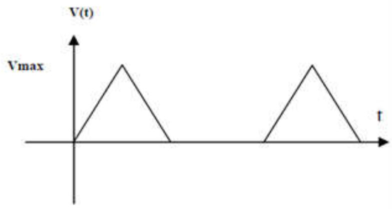
Exercice 4

Calculer la valeur moyenne du signale suivant :



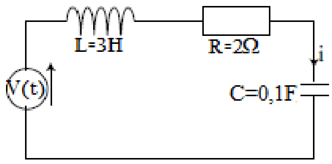
Exercice 5

Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace des signaux ci-dessous :

	Vmoy=	Veff=
	Vmoy=	Veff=
	Vmoy=	Veff=
	Vmoy=	Veff=

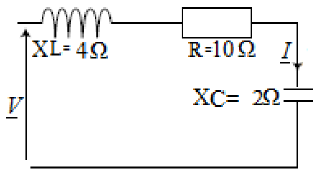
Exercice 06

Soit le circuit ci-contre avec : V(t) = 115*sqrt(2)*sin(ωt+30) et f = 50Hz
Donner le schéma équivalent dans le plan complexe (calculer Xl, Xc, module et argument de $\underline{V}$, et $\underline{I}$)



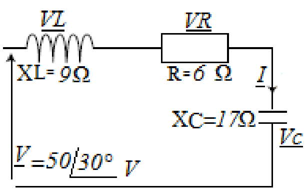
Exercice 07

Soit le circuit ci-contre
- Calculer l'impédance équivalente
- Tracer le diagramme des impédances

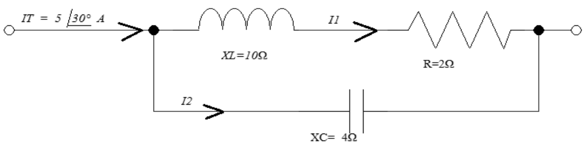


Exercice 08

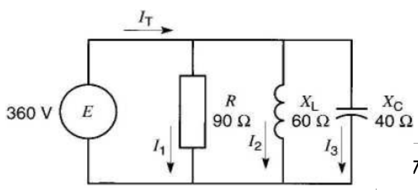
Soit le circuit ci-contre
- Calculer l'impédance équivalente
- Calculer la tension aux bornes de chaque élément
- Tracer le diagramme de Fresnel des tensions et du courant



Exercice 09
Soit le circuit ci-contre
- Calculer les courants complexes I1 et I2
- Tracer le diagramme de Fresnel des courants



Exercice 10
Tracer le diagramme vectoriel pour le circuit de la Figure ci-contre. Trouver la valeur efficace du courant I_T et son déphasage par rapport à la tension E.
La tension de la source est de 360 V efficace.



Quelle est le type de ce circuit.

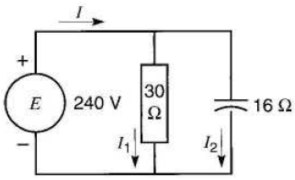
Exercice 11

Le circuit de la Figure ci-contre comprend une résistance de 30 Ω et une réactance capacitive de 16Ω raccordées en parallèle sur une source de 240 V. Trouver:

a) le courant I et son déphasage par rapport à la tension E.

b) l'impédance du circuit.

c) les puissances active; réactive et apparente du circuit.

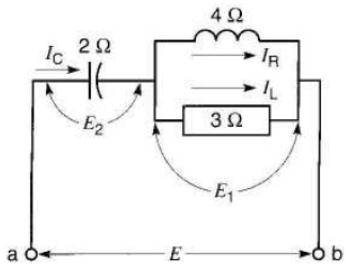


Exercice 12

Tracer le diagramme vectoriel global des tensions (E_1 choisi comme vecteur de référence, E_2, E) et des courants (I_R, I_L et I_c), on donne la valeur efficace de E1 égale 12 V.

Déterminer le module de l'impédance entre les points a et b du circuit mixte.

Calculer les puissances active ; réactive et apparente du circuit



Solution

Exo 1

La tension efficace est:

$$E_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,dt} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{R}$$

La puissance dissipée dans la résistance vaut :

$$P = E_{eff} \times I_{eff}$$

$V_{moy} = 0$

$V_{eff}^2 = \frac{1}{5\,10^{-3}}\left[\int_1^{2,5} 5^2 dt + \int_{2,5} (-5)^2 dt\right]$

$= \frac{1}{5\,10^{-3}}\left[25[t]_1^{2,5} + 25[t]_{2,5}\right]$

$= \frac{1}{5\,10^{-3}}\left(25 \cdot 1,5\,10^{-3} + 25\ 1,5\,10^{-3}\right)$

$V_{eff}^2 = \frac{50}{5} = 10 \Rightarrow V_{eff} = \sqrt{10}$

Exo 2

Exo3

Exo 3

$V_{eff}^2 = \frac{1}{2,5}\int_1^{2,5} 5^2 dt = \frac{1}{2,5}\,25[t]_1^{2,5}$

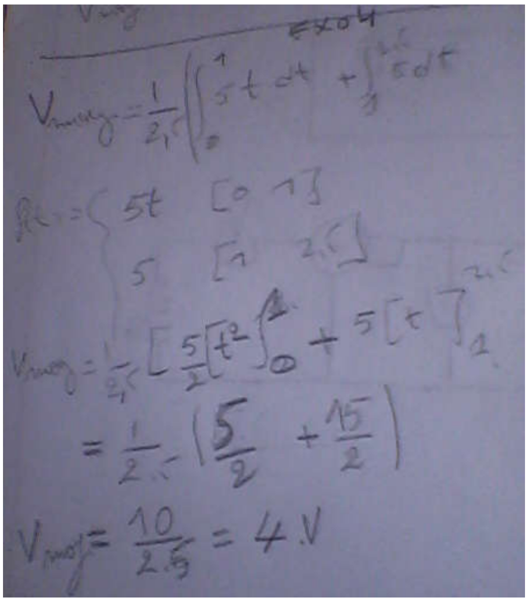
$= \frac{25}{2,5}\,1,5 = 10 \times 1,5 = 15$

$\Rightarrow V_{eff} = \sqrt{15}$

$V_{moy} = \frac{1}{2,5}\int_1^{2,5} 5\,(dt) = \frac{5}{2,5} \times 1,5$

$V_{moy} = 3$ V

Exo4



Exo 4

$V_{moy} = \frac{1}{2,5}\left(\int_0^1 5t\,dt + \int_1^{2,5} 5\,dt\right)$

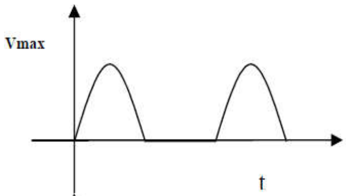
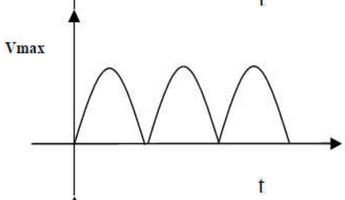
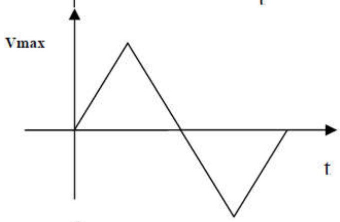
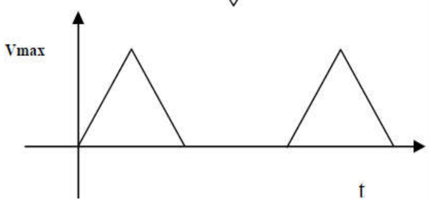
$f(t) = \begin{cases} 5t & [0\ 1] \\ 5 & [1\ \ 2,5] \end{cases}$

$V_{moy} = \frac{1}{2,5}\left[\frac{5}{2}[t^2]_0^1 + 5[t]_1^{2,5}\right]$

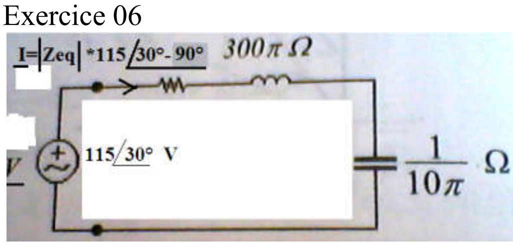
$= \frac{1}{2,5}\left(\frac{5}{2} + \frac{15}{2}\right)$

$V_{moy} = \frac{10}{2,5} = 4\,V$

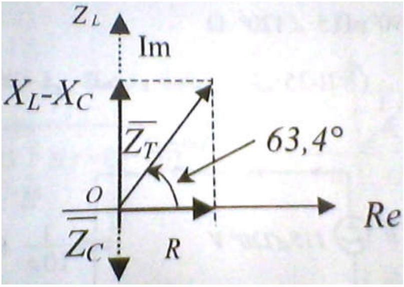
Exo 5

	$V_{moy} = \frac{V_{max}}{\pi}$	$V_{eff} = \frac{V_{max}}{2}$
	$V_{moy} = \frac{2.V_{max}}{\pi}$	$V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$
	$V_{moy} = 0$	$V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{3}}$
	$V_{moy} = \frac{V_{max}}{4}$	$V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{6}}$

Exercice 06



Exercice 07



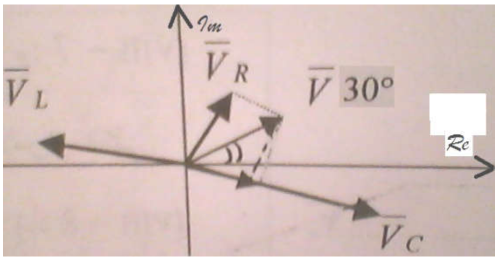
$$\overline{Z_T} = R + j(X_L - X_C)$$

Exercice 08

$$\overline{V_R} = \overline{V}\frac{R}{Z_{eq}} = \frac{6.50\angle 30}{10\angle -53} = 30\angle 83° \ \text{V}$$

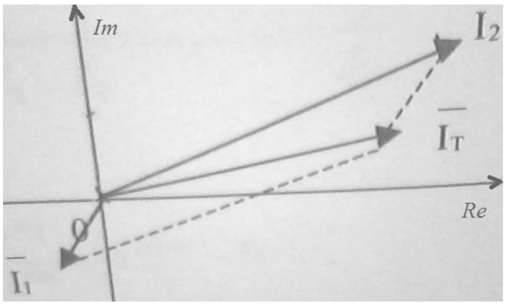
$$\overline{V_C} = \overline{V}\frac{Z_C}{Z_{eq}} = \frac{(50\angle 30°)(17\angle -90°)}{10\angle -53} = 85\angle -7° \ \text{V}$$

$$\overline{V_L} = \overline{V}\frac{Z_L}{Z_{eq}} = \frac{(50\angle 30°)(09\angle 90°)}{10\angle -53} = 45\angle 173° \ \text{V}$$



Exercice 09

$$\overline{I_2} = \overline{I_T}\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}} = \frac{(5\angle 30°)(\sqrt{104}\angle 78{,}69)}{\sqrt{40}\angle 71{,}56°} \qquad \overline{I_1} = \overline{I_T}\frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}} = (5\angle 30°)\frac{4\angle -90°}{2+j6}$$



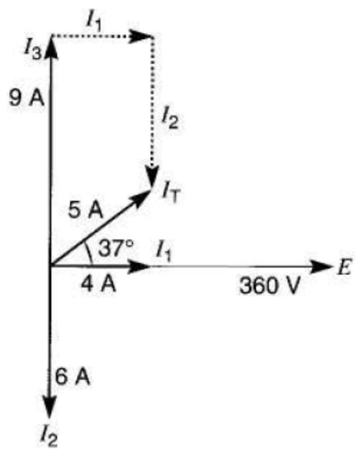
Exercice 10

I_1 = 360 V/90 Ω = 4 A, en phase avec E, car l'élément est résistif. (On utilise l'échelle 3 mm = 1 A.)

I_2 = 360 V/60 Ω = 6 A, 90° en arrière de E, car l'élément est inductif.

I_3 = 360 V/40 Ω = 9 A, 90° en avant de E, car l'élément est capacitif.

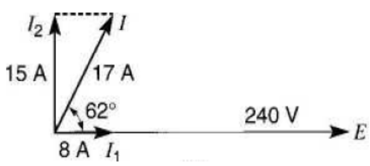
Le courant I_T est la somme vectorielle des courants I_1, I_2 et I_3. D'après la construction graphique, on mesure I_T = 15 mm, soit 5 A efficace. Un rapporteur indique que I_T est déphasé de 37° en avance sur E



Exercice 11

1. La tension étant commune aux deux éléments, on la choisit comme vecteur de référence. Traçons le vecteur dans le sens horizontal.
2. I_1 = 240 V/30 Ω = 8 A. L'élément de 30 Ω étant résistif, le courant I_1 est en phase avec la tension.
3. I_2 = 240 V/16 Ω = 15 A. L'élément de 16 Ω étant capacitif, ce courant est déphasé de 90° en avance sur la tension.
4. Le courant I est égal à la somme vectorielle

$$I = I_1 + I_2$$



$Z = E/I$ = 240 V/17 A = 14,1 Ω

c) L'élément résistif de 30 Ω consomme une puissance active:

$$P = EI_1 = 240 \text{ V} \times 8 \text{ A} = 1920 \text{ W}$$

L'élément capacitif de 60 Ω représente une puissance réactive:

$$Q = EI_2 = 240 \text{ V} \times 15 \text{ A} = 3600 \text{ var}$$

La puissance apparente du circuit est:

$$S = EI = 240 \times 17 = 4080 \text{ VA}$$

On observe que la puissance apparente n'est pas égale à la somme arithmétique des puissances active et réactive: 4080   1920 + 3600.

Exercice 12

$I_R = 12 \text{ V}/3\ \Omega = 4\text{A}$ et son vecteur est en phase avec E_1.

Le courant I_L a une valeur de:

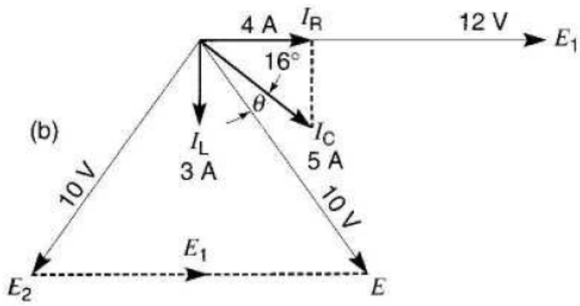
$$I_L = 12\text{V}/4\Omega = 3 \text{ A}$$

et son vecteur est 90° en arrière de E_1.

Le courant I_C dans le condensateur est égal à la somme vectorielle de I_R et de I_L et sa valeur (mesurée à l'échelle) est de 5 A. La tension E_2 aux bornes du condensateur est donc:

$$E_2 = I_C X_C = 5 \text{ A} \times 2\ \Omega = 10 \text{ V}$$

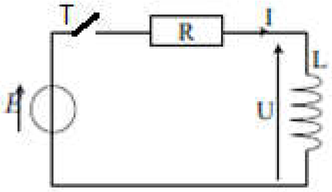
La tension E (entre les bornes **a** et **b**) est donnée par la somme vectorielle de E_1 et de E_2, ce qui donne 10 V (mesurée à l'échelle).



L'impédance Z_{ab} du circuit est donc:

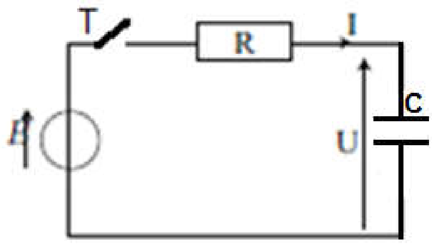
$$Z_{ab} = \frac{E}{I_C} = \frac{10 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 2\ \Omega$$

Exercice 01



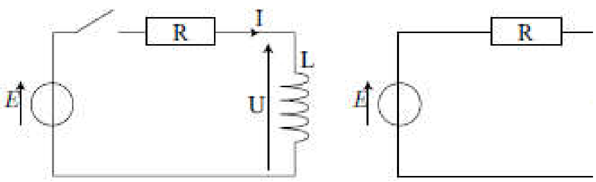
Soit le circuit ci-contre
En régime continu, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé (U = 0) et I = E/R.
On prendra R = 50 Ω L= 70 mH r = 27 Ω (résistance interne de l'inductance)
A t = 0, on supprime E :
Écrire l'équation différentielle qui traduit l'évolution du courant dans ce cas
Trouver la solution de cette équation, en déduire l'évolution de la tension aux bornes de la bobine
Calculer la valeur de la constante du temps.

Exercice2



Soit le circuit ci-contre
Le condensateur est initialement déchargé
Écrire l'équation différentielle qui traduit l'évolution de la tension aux bornes du condensateur ;
Trouver la solution de cette équation ;
Tracer la courbe U(t) ;
On donne E(t) = Vm sin(ωt +θv).

Solution exo 01



Régime continu $U = 0$ et $I = 0$.
A $t = 0$, on ferme l'interrupteur :

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

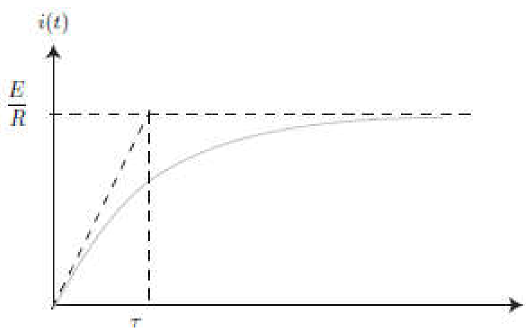
$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L} \quad \text{avec} \quad \tau = L/R$$

La solution est de la forme $i(t) = i^{(h)} + i^{(p)} = A\exp(-t/\tau) + \frac{E}{R}$.

$i(0) = A + \frac{E}{R} = 0$ par continuité de l'intensité du courant dans la bo

Finalement

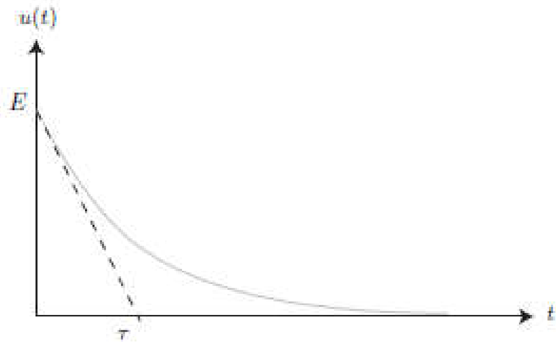
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau))}$$



6.2 Évolution de la tension aux bornes de la bobine

$u = L\frac{di}{dt}$ ce qui donne

$$\boxed{u(t) = E\exp(-t/\tau)}$$

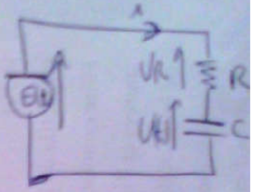


Calcule de τ
On cherche la pente à l'origine
y = k.t

Avec k Δi /Δt → k= di /dt | à t=0s
Le point d'intersection entre la pente à l'origine et E/R nous donne la valeur de τ

Exo 02

$E(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v)$



$E - V_R - U = 0$

$\Rightarrow V_R + U = E$

$\left.\begin{array}{l} V_R = Ri \\ U = V_c \\ i = C\dfrac{dV_c}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow Ri + V_c = E(t) \Rightarrow RC\dfrac{dV_c}{dt} + V_c = E(t)$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dV_c}{dt} + \dfrac{V_c}{RC} = \dfrac{E(t)}{RC}}$

$V_c(t) = V_{ch} + V_{cp}$

$V_{ch} \Rightarrow \dfrac{dV_c}{dt} + \dfrac{V_c}{RC} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dV_c}{dt} = -\dfrac{V_c}{RC}$

$\Rightarrow \int \dfrac{dV_c}{V_c} = \int -\dfrac{1}{RC}$

$\Rightarrow \ln V_c = \dfrac{-1}{RC}t + k'$

$\Rightarrow V_{ch} = e^{-\frac{t}{RC} + k'} \quad / \quad e^{k'} = k$

$\Rightarrow V_{ch} = k e^{-t/\tau} \quad / \quad \tau = RC$

$E(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v) \rightarrow E(t) = V_m e^{j(\omega t + \theta_v)}$

$\Rightarrow V_{cp} = A e^{j(\omega t + \theta)}$

$\Rightarrow \dfrac{d\,A e^{j(\omega t+\theta)}}{dt} + \dfrac{A}{RC} e^{j(\omega t+\theta)} = \dfrac{V_m}{RC} e^{j(\omega t+\theta_v)}$

$\Rightarrow \dfrac{A}{j\omega} e^{j(\omega t+\theta)} + \dfrac{A}{RC} e^{j(\omega t+\theta)} = \dfrac{V_m}{RC} e^{j(\omega t+\theta_v)}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{j\omega} + \dfrac{1}{RC}\right) A e^{j(\omega t+\theta)} = \dfrac{V_m}{RC} e^{j(\omega t+\theta_v)}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{RC + j\omega}{jRC\omega}\right) A e^{j(\omega t+\theta)} = \dfrac{V_m}{RC} e^{j(\omega t+\theta_v)}$

$\Rightarrow \dfrac{-\omega + jRC}{\omega} A e^{j(\omega t+\theta)} = V_m e^{j(\omega t+\theta_v)}$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{V_m \cdot \omega}{-\omega + jRC} \\ \theta = \theta_v \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \dfrac{V_m \omega}{\sqrt{\omega^2 + (RC)^2}} \angle + \mathrm{arctg}\dfrac{RC}{j\omega} \\ \theta = \theta_v. \end{array}$

$\Rightarrow A = \dfrac{V_m \omega}{\sqrt{\omega^2 + (RC)^2}} e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{RC}{\omega}}$

$\Rightarrow V_{cp} = \dfrac{V_m \omega}{\sqrt{\omega^2 + (RC)^2}} e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{RC}{\omega}} \cdot e^{j\omega t + \theta_v}$

$\Rightarrow V_{cp} = \dfrac{V_m \cdot \omega}{\sqrt{\omega^2 + (RC)^2}} e^{j(\omega t + \theta_v + \mathrm{arctg}\frac{RC}{j\omega})}$

$$\Rightarrow V_{cp} = \frac{V_m \cdot w}{\sqrt{w^2+(RC)^2}}\, e^{j\left(wt+\theta_v+\operatorname{arctg}\frac{RC}{w}\right)}$$

$$\boxed{V_{cP} = \frac{V_m w}{\sqrt{w^2+(RC)^2}} \sin\left(wt+\theta_v+\operatorname{arctg}\frac{RC}{w}\right)}$$

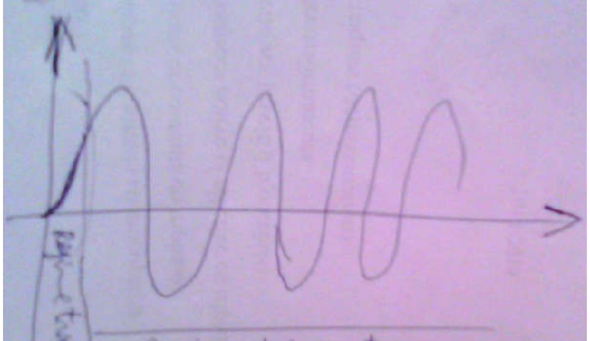
$$\Rightarrow V_c(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_m w}{\sqrt{w^2+(RC)^2}} \sin\left(wt+\theta_v+\operatorname{arctg}\frac{RC}{w}\right)$$

a $t=0 \Rightarrow V_c(0) = 0\,V$

$$\Rightarrow K = -\frac{V_m w}{\sqrt{w^2+(RC)^2}} \sin\left(\theta_v+\operatorname{arctg}\frac{RC}{w}\right)$$

$$\Rightarrow V_c(t) = \frac{V_m}{\sqrt{w^2+(RC)^2}}\left[\sin\left(wt+\theta_v+\operatorname{arctg}\frac{RC}{w}\right) - \sin\left(\theta_v+\operatorname{arctg}\frac{RC}{w}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

$V_c(t) = U(t)$



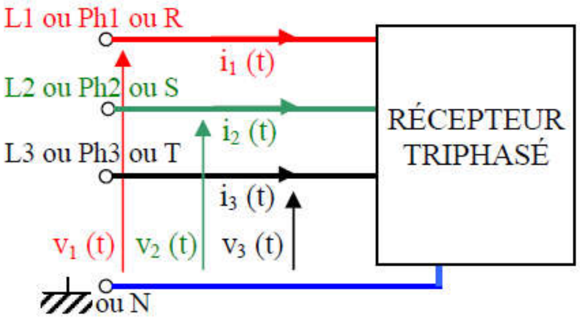
Régime transitoire

Régime permanent

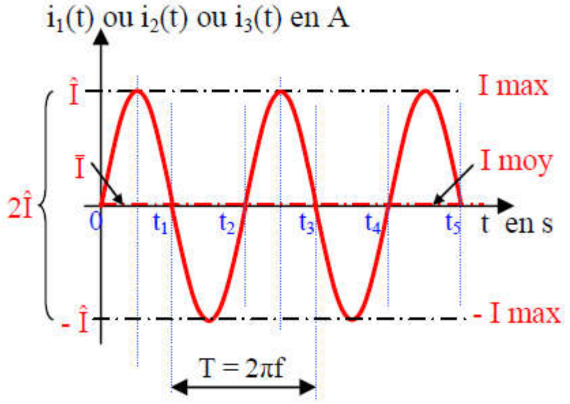
$$V_c(t) = \frac{V_m}{\sqrt{w^2+(RC)^2}} \sin\left(wt+\theta_v+\operatorname{arctg}\frac{RC}{w}\right)$$

Système triphasé

2.1. Définitions et caractéristiques



Un **circuit triphasé** est un circuit alimenté par **trois tensions alternatives sinusoïdales $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$,** et parcouru par **3 courants alternatifs sinusoïdaux $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$**.
Les valeurs de $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ et de $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ changent avec le temps.
Le circuit est constitué de **3 phases** notées Ph1 ou L1 ou R, Ph2 ou L2 ou S, Ph3 ou L3 ou T, référencée par rapport à une masse ou **un neutre** N.

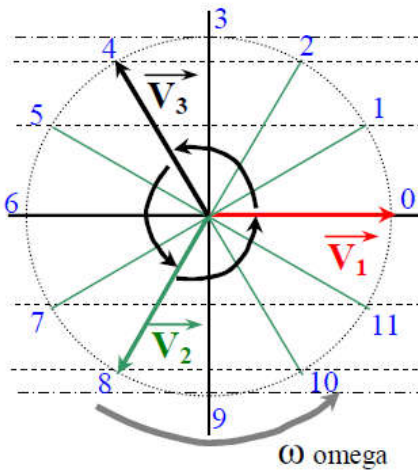


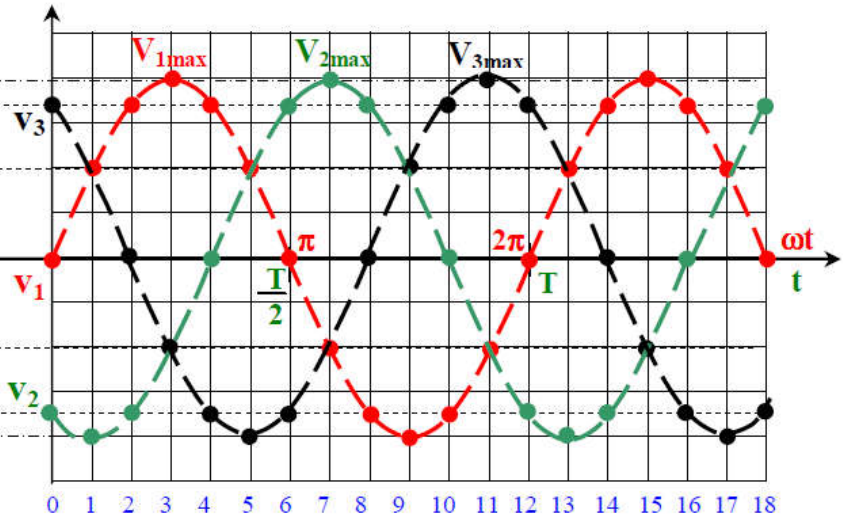
Comme en circuit monophasé, en circuit triphasé, un courant alternatif sinusoïdal est un courant bidirectionnel, périodique et symétrique. Il en est de même pour une tension alternative sinusoïdale.

La représentation graphique du courant varie en fonction du temps de façon sinusoïdale. Les trois courants $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ ont la même fréquence.

Un circuit triphasé est caractérisé par le fait que les trois tensions ont la même fréquence et sont déphasées les unes par rapport aux autres de 120°

2.2. Représentation vectorielle de Fresnel





Dans l'exemple ci dessus nous avons représenté la tension: $v_1 = V_{1max}$ **sin (ω.t + φ)**
Puis, déphasée par rapport à v_1 de 120 degrés ou 2π/3 rad $v_2 = V_{2max}$ **sin (ω.t + φ - 2π/3)**
Puis, déphasée par rapport à v_2 de 120 degrés ou 2π/3 rad $v_3 = V_{3max}$ **sin (ω.t + φ - 4π/3)**
Puis, déphasée par rapport à v_3 de 120 degrés ou 2π/3 rad de nouveau v_1

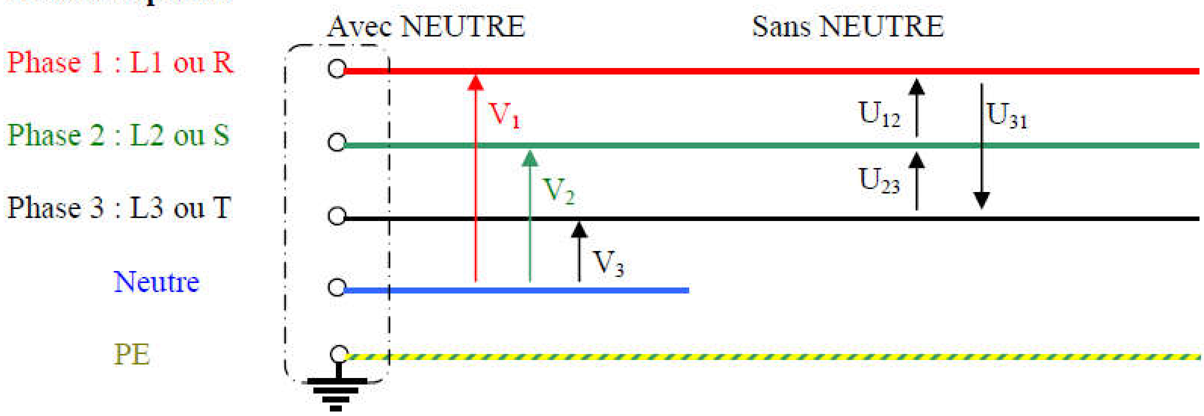
➢ Tensions simples

Dans le cas d'un réseau triphasé avec neutre, on appelle **tensions simples** les différences de potentiel mesurées entre **une phase et le neutre** et dont les valeurs efficaces sont notées :
V_1 pour la phase 1, V_2 pour la phase 2 et V_3 pour la phase 3.
En général sur un réseau triphasé on a $V_1 = V_2 = V_3 = V$.

➢ Tensions composées

Dans le cas d'un réseau triphasé sans neutre, on appelle **tensions composées** les différences de potentiel mesurées entre **deux phases** et dont les valeurs efficaces sont notées :
$U_{12} = V_1 - V_2$, $U_{23} = V_2 - V_3$ et $U_{31} = V_3 - V_1$.
En général sur un réseau triphasé on a $U_{12} = U_{23} = U_{31} = U$.

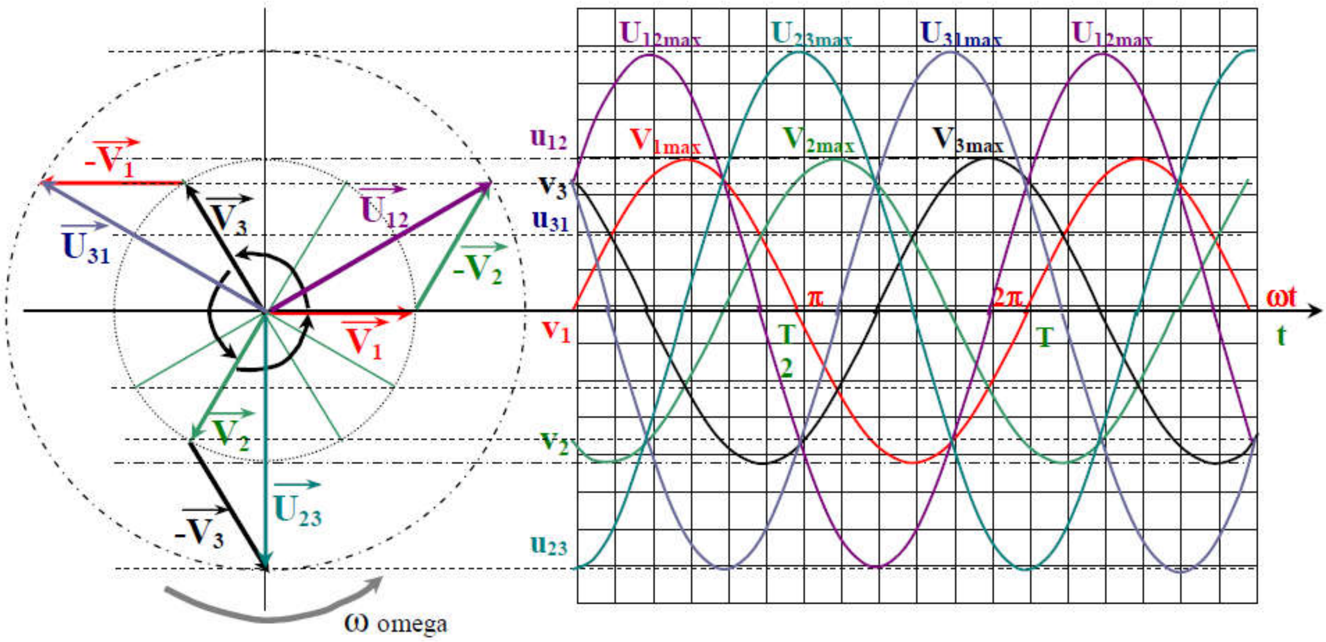
Réseau triphasé:



➢ Représentation de Fresnel des tensions

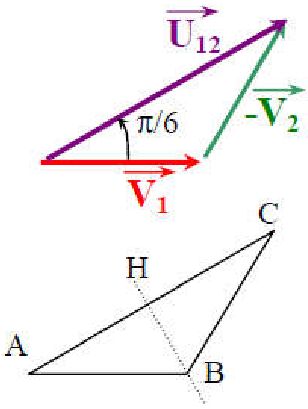
A partir des 3 tensions simples définies positivement dans le sens trigonométrique, nous pouvons construire la représentation de Fresnel des tensions composées :

$\overrightarrow{U_{12}} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{U_{23}} = \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{U_{31}} = \overrightarrow{V_3} - \overrightarrow{V_1}$



Sur la représentation de Fresnel on constate que les tensions composées sont en avance de phase de par rapport aux tensions simples de $\pi/6$ rad.
Lorsque l'ordre de passage des vecteurs dans le sens trigonométrique est V_1 puis V_2 puis V_3 pour les tensions simples ou bien U_{12} puis U_{23} puis U_{31} pour les tensions composées, le système est dit **direct**.
Lors du contrôle de la rotation des phases on vérifie le **sens direct** : RST dans le sens trigonométrique.

- Relation entre tension simple et tension composée



Le triangle ABC est isocèle est telle que :
$AB = V_1$
$BC = V_2$
$AC = U_{12} = 2AH = 2HC$
L'angle $HAB = \pi/6$
Donc $AH = AB \cos(\pi/6) = AB.\ \sqrt{3}/2$
Donc $AC = 2AH = AB.\ \sqrt{3}$

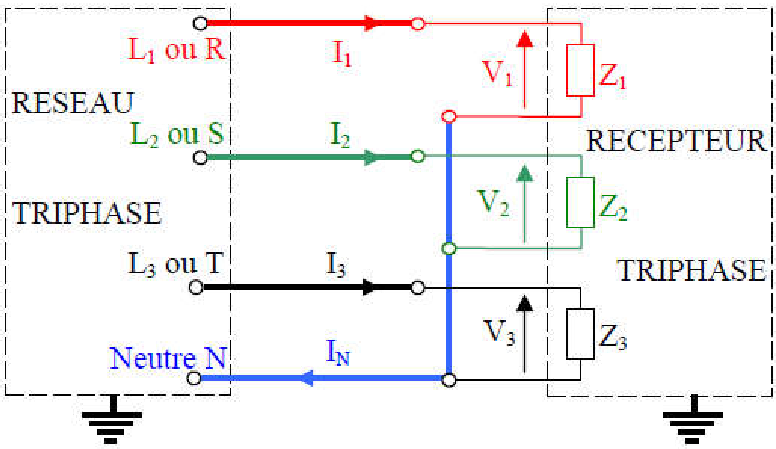
$$\boxed{U = \sqrt{3}\,.\,V}$$

- Exemple de réseaux triphasés

Le réseau triphasé le plus connu est le réseau 230V/ 400V ce qui signifie que V = 230 V et U = 400 V
Si une seule tension est citée, par exemple réseau 400 V, on parle alors de la tension composée.

2.4. Récepteurs triphasés

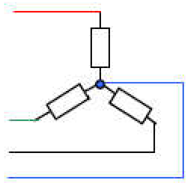
- Couplage ETOILE



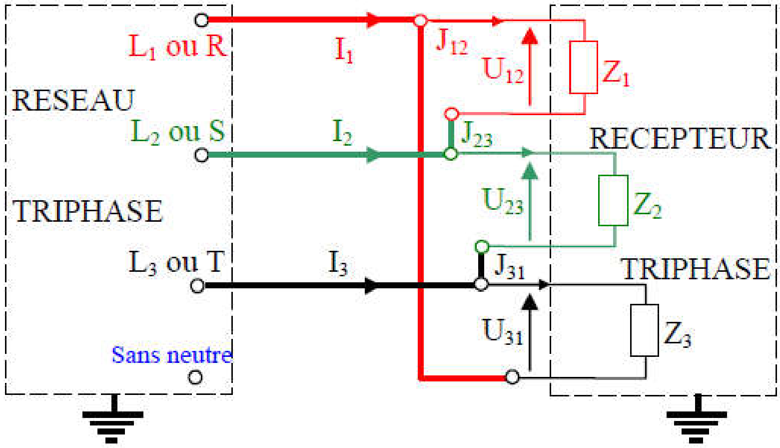
Dans un couplage étoile chacun des récepteurs est branché entre une phase et le neutre ; La tension à ses bornes est donc la **tension simple** du réseau.
Chacun des récepteurs est traversé par le **courant de ligne** présent dans le conducteur qui l'alimente.
Loi des nœuds : $\boxed{\vec{I_N} = \vec{I_1} + \vec{I_2} + \vec{I_3}}$

Le couplage étoile est noté : Y

Le nom du couplage vient du fait que les 3 impédances sont reliées en forme d'étoile :



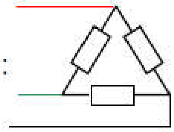
➢ Couplage TRIANGLE



Dans un couplage triangle chacun des récepteurs est branché entre deux phases; La tension à ses bornes est donc la **tension composée** du réseau.
Chacun des récepteurs est traversé par le **courant noté J** qui n'est pas le courant de ligne présent dans le conducteur qui l'alimente.

Le couplage triangle est noté : Δ

Le nom du couplage vient du fait que les 3 impédances sont reliées en forme de triangle :



➢ Relation entre courant de ligne et courant dans un récepteur

Dans un couplage étoile, le courant dans le récepteur est le même que le courant de ligne.

- pour le récepteur d'impédance Z_1 la loi d'Ohm donne $V_1 = Z_1 \cdot I_1 \rightarrow Z_1 = V_1 / I_1$
- pour le récepteur d'impédance Z_2 la loi d'Ohm donne $V_2 = Z_2 \cdot I_2 \rightarrow Z_2 = V_2 / I_2$
- pour le récepteur d'impédance Z_3 la loi d'Ohm donne $V_3 = Z_3 \cdot I_3 \rightarrow Z_3 = V_3 / I_3$

Dans un couplage triangle, le courant dans le récepteur n'est pas le même que le courant de ligne

- pour le récepteur d'impédance Z_1 la loi d'Ohm donne $U_{12} = Z_1 \cdot J_{12} \rightarrow Z_1 = U_{12} / J_{12}$
- pour le récepteur d'impédance Z_2 la loi d'Ohm donne $U_{23} = Z_2 \cdot J_{23} \rightarrow Z_2 = U_{23} / J_{23}$
- pour le récepteur d'impédance Z_3 la loi d'Ohm donne $U_{31} = Z_3 \cdot J_{31} \rightarrow Z_3 = U_{31} / J_{31}$

Les impédances étant les mêmes dans le couplage étoile et dans le couplage triangle ;

- pour le récepteur d'impédance Z_1 on a $Z_1 = V_1 / I_1 = U_{12} / J_{12}$ avec $U_{12} = \sqrt{3}.V_1$ donc $I_1 = \sqrt{3}.J_{12}$
- pour le récepteur d'impédance Z_2 on a $Z_2 = V_2 / I_2 = U_{23} / J_{23}$ avec $U_{23} = \sqrt{3}.V_2$ donc $I_2 = \sqrt{3}.J_{23}$
- pour le récepteur d'impédance Z_3 on a $Z_3 = V_3 / I_3 = U_{31} / J_{31}$ avec $U_{31} = \sqrt{3}.V_3$ donc $I_3 = \sqrt{3}.J_{31}$

D'une manière générale pour un **couplage triangle** le courant de ligne est plus grand que le courant dans le récepteur. La relation est la suivante :

$$\boxed{\mathbf{I = \sqrt{3} \, . \, J}}$$

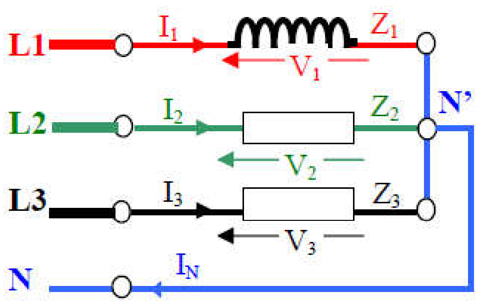
2.5. Système triphasé équilibré

Lorsque les trois tensions qui composent le réseau triphasé sont identiques :
même amplitude, même fréquence et même déphasage de 120 degrés les unes par rapport aux autres
Et lorsque les trois éléments qui composent le récepteur triphasé sont identiques :
même impédance, même résistance, même réactance, même nature
Alors les trois courants qui alimentent le récepteur triphasé sont identiques :
même amplitude, même fréquence et même déphasage de 120 degrés les uns par rapport aux autres.
On dit alors que le système triphasé est équilibré.

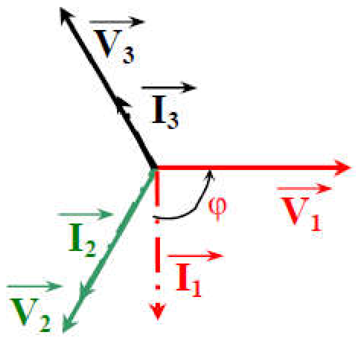
2.6. Système triphasé déséquilibré

Lorsque les trois tensions qui composent le réseau triphasé ne sont pas identiques :
Amplitude différente, ou fréquence différente ou déphasage différent de 120 degrés
ou lorsque les trois éléments qui composent le récepteur triphasé ne sont pas identiques :
impédance différente, ou résistance différente, ou réactance différente, ou nature différente
Alors les trois courants qui alimentent le récepteur triphasé ne sont pas identiques :
amplitude différente, ou fréquence différente, ou déphasage différent de 120 degrés
On dit alors que le système triphasé est déséquilibré.

Prenons l'exemple d'un récepteur triphasé constitué de trois éléments différents : un enroulement et de deux résistors couplés en étoile et alimentés par un réseau triphasé de trois tensions identiques.

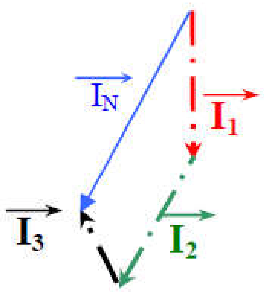


- Les tensions simples V_1, V_2 et V_3 ont même amplitude V et sont déphasées l'une par rapport à l'autre de 120 degrés.
- Les trois enroulements Z_1, Z_2, Z_3 sont soumis à la même tension simple du réseau et ont des impédances de valeur différente et de nature différente.
- Les trois courants I_1, I_2 et I_3 traversant les enroulements ont donc des amplitudes différents. Leur déphasage par rapport à V_1, V_2, V_3 n'est pas le même:
  I_1 est en retard par rapport à V_1
  I_2 et I_3 sont respectivement en phase avec V_2 et V_3



Nous pouvons alors tracer **la représentation de Fresnel** des tensions et des courants:

Si l'on considère que les bobines sont parfaites c'est à dire que leur résistance est négligeable par rapport à leur réactance,
Nous avons : I_1 en retard sur V_1 de $\pi/2$,
I_2 en phase avec V_2 , et I_3 en phase avec V_3 ,
Avec les valeurs efficaces $V_1 = V_2 = V_3$ et $I_1 \neq I_2 \neq I_3$



La somme vectorielle des courants $\overrightarrow{I_1} + \overrightarrow{I_2} + \overrightarrow{I_3}$ n'est pas nulle donc la somme instantanée des courants $i_1 + i_2 + i_3 \neq 0$

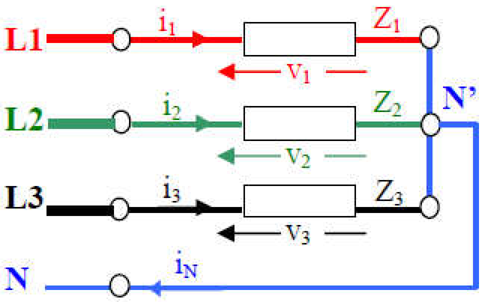
D'après la loi des nœuds en N' on a : $\boxed{\overrightarrow{I_N} = \overrightarrow{I_1} + \overrightarrow{I_2} + \overrightarrow{I_3}}$

Donc $I_N \neq 0$: **il y a un courant qui circule dans le neutre**.

En régime triphasé déséquilibré le courant dans le neutre n'est pas nul. Donc pour un système triphasé déséquilibré, couplé en étoile, il faut absolument s'assurer que le fil de neutre est branché sur le couplage.

Si l'on ne branche pas le fil de neutre sur un système triphasé déséquilibré couplé en étoile, I_N sera nul et donc $\overrightarrow{I_1} + \overrightarrow{I_2} + \overrightarrow{I_3} = 0$. Les courants vont se modifier ce qui aura pour effet de déséquilibrer les tensions; On aura alors $\overrightarrow{V'_1} + \overrightarrow{V'_2} + \overrightarrow{V'_3} \neq 0$ et **La différence de potentiel $V_{NN'}$ sera non nulle : $V_N \neq V_{N'}$**
Les tensions V'_1, V'_2, V'_3 peuvent prendre des valeurs efficaces importantes. Dans le doute, il faut toujours relier le couplage étoile au neutre. C'est pour cela qu'**on ne met pas de fusible sur le neutre**.

2.7. Puissance dans un système triphasé



Nous savons qu'un récepteur triphasé est l'association de trois récepteurs monophasés d'impédances Z_1, Z_2 et Z_3.

En régime alternatif sinusoïdal, la tension et le courant varient dans le temps.
On peut définir à tout instant une **puissance instantanée**,

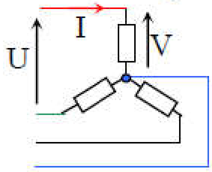
$$\boxed{p = p_1 + p_2 + p_3 = v_1 \cdot i_1 + v_2 \cdot i_2 + v_3 \cdot i_3}$$

➢ **Puissance active**

La **puissance active notée P** est la valeur moyenne de la puissance instantanée.
Elle est égale à la somme arithmétique des puissance actives des trois récepteurs monophasés
C'est à dire à trois fois la puissance active monophasée lorsque le système est équilibré

$$\boxed{P_{tri} = P_1 + P_2 + P_3 = 3 \cdot P_{mono}}$$

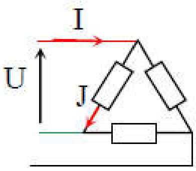
- Cas d'un système équilibré couplé en étoile



V est la valeur efficace de la tension simple
I est la valeur efficace du courant de ligne
φ' est le déphasage de I par rapport à V

$$\boxed{P = 3 \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi' \quad \text{avec } V = U / \sqrt{3}}$$

- Cas d'un système équilibré couplé en triangle



U est la valeur efficace de la tension composée
J est la valeur efficace du courant d'un récepteur
φ' est le déphasage de J par rapport à U

$$\boxed{P = 3 \cdot U \cdot J \cdot \cos\varphi' \quad \text{avec } J = I / \sqrt{3}}$$

Quelque soit le couplage pour un système triphasé équilibré
La puissance active est donnée par la relation ci contre
dans laquelle U est la valeur efficace de la tension composée
I est la valeur efficace du courant en ligne
φ est le déphasage du courant I par rapport à la tension U

$$\boxed{\underset{(W)}{P} = \sqrt{3} \cdot \underset{(V)}{U} \cdot \underset{(A)}{I} \cdot \cos\varphi}$$

- **Puissance réactive**

La **puissance réactive notée Q** est la puissance mise en jeu dans les dipôles réactifs.
Elle est due à la réactance et s'exprime en VAr (Volt Ampère réactif)
Elle est égale à la somme arithmétique des puissance actives des trois récepteurs monophasés
C'est à dire à trois fois la puissance réactive monophasée lorsque le système est équilibré

$$\boxed{Q_{tri} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3 \cdot Q_{mono}}$$

Quelque soit le couplage pour un système triphasé équilibré
La puissance réactive est donnée par la relation ci contre
dans laquelle U est la valeur efficace de la tension composée
I est la valeur efficace du courant en ligne
φ est le déphasage du courant I par rapport à la tension U

$$\boxed{\underset{(VAr)}{Q} = \sqrt{3} \cdot \underset{(V)}{U} \cdot \underset{(A)}{I} \cdot \sin\varphi}$$

On peut exprimer la puissance réactive en fonction de la puissance active :

$$\boxed{Q = P \cdot tg\varphi}$$

- **Pour un système constitué de 3 résistors identiques** nous savons que le déphasage du courant par rapport à la tension est nul donc $\sin\varphi = 0$. $\boxed{Q = 0}$

- **Pour un système constitué de 3 réactors parfaits identiques**, le déphasage du courant par rapport à la tension est $+\pi/2$ donc $\sin\varphi = 1$. $\boxed{Q_L = \sqrt{3}.U.I = 3.X_L.I^2}$

- **Pour un système constitué de 3 condensateurs identiques**, le déphasage du courant par rapport à la tension est $-\pi/2$ donc $\sin\varphi = -1$. $\boxed{Q_C = -\sqrt{3}.U.I = -3.X_C.I^2}$

- **Puissance apparente**

La **puissance apparente notée S** est la puissance qui caractérise le générateur source de tension et de courant alternatif. Quand on met à disposition une source d'énergie électrique alternative, on ne connait pas l'utilisation qui sera faite par l'utilisateur et donc on ne connait pas le déphasage entre le courant et la tension. Par contre, il est nécessaire de connaître la tension et l'intensité disponible.

Elle est égale à la somme vectorielle des puissance apparentes des trois sources monophasées
C'est à dire à trois fois la puissance apparente monophasée lorsque le système est équilibré

$$\boxed{\overrightarrow{S_{tri}} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3} = 3 \cdot \overrightarrow{S_{mono}}}$$

Quelque soit le couplage pour un système triphasé équilibré
La puissance apparente est donnée par la relation ci contre
dans laquelle U est la valeur efficace de la tension composée
I est la valeur efficace du courant en ligne
φ est le déphasage du courant I par rapport à la tension U

$$\boxed{\underset{(VA)}{S} = \sqrt{3} \cdot \underset{(V)}{U} \cdot \underset{(A)}{I}}$$

On peut exprimer la puissance apparente S en fonction de la puissance active P et de la puissance réactive Q :

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

- **Facteur de puissance**

Nous venons de voir que la **puissance active** est donnée par la relation : $\mathbf{P = \sqrt{3} . U . I . \cos\varphi}$

et que la **puissance apparente** est donnée par la relation : $\mathbf{S = \sqrt{3} . U . I}$

donc : $\mathbf{P = S . \cos\varphi}$

Donc comme en monophasé, le facteur de puissance en triphasé est : $\boxed{\mathbf{\cos\varphi = P / S} \quad (W)\ (VA)}$

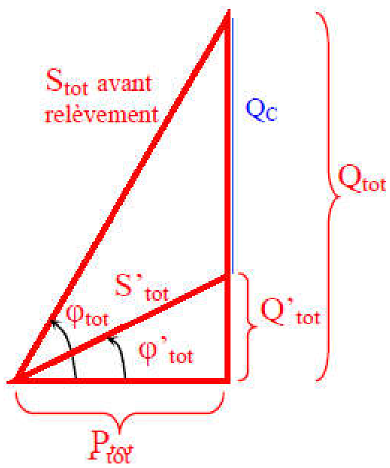
- **Triangle des puissances**

De la même façon que nous avons défini le triangle des impédances nous pouvons tracé le **triangle des puissances** :

Puissance active totale :	$P_{tot} = \Sigma P = R_{tot} . I^2$
Puissance réactive totale :	$Q_{tot} = \Sigma Q = X_{tot} . I^2 = P_{tot} \operatorname{tg}\varphi$
Puissance apparente totale :	$S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2} = Z_{tot} . I^2$
Facteur de puissance :	$\cos\varphi = \dfrac{P_{tot}}{S_{tot}}$

- Relèvement du facteur de puissance d'une installation triphasée

Le relèvement du facteur de puissance consiste à augmenter $\cos\varphi_{tot}$

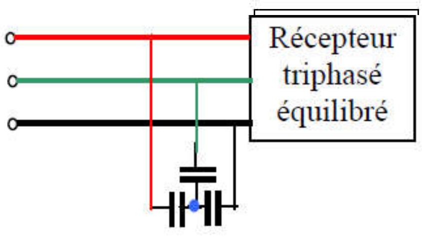


Pour cela il faut que le montage fournisse plus de puissance réactive. Il convient donc d'augmenter Q_C en rajoutant des condensateurs aux bornes du récepteur triphasé sans déséquilibrer le système.

Avant relèvement : on a $Q_{tot} = P_{tot} \operatorname{tg}\varphi_{tot}$ et $S_{tot} = V . I_{tot}$

Après relèvement : on veut $Q'_{tot} = P_{tot} \operatorname{tg}\varphi'_{tot}$ et $S'_{tot} = V . I'_{tot}$

Il faut donc **fournir** $Q_C = Q_{tot} - Q'_{tot} = P_{tot} (\operatorname{tg}\varphi_{tot} - \operatorname{tg}\varphi'_{tot})$

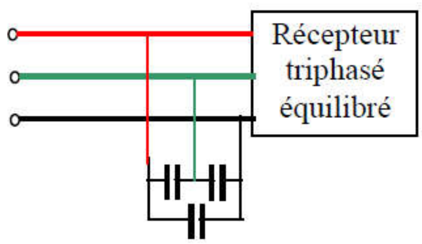


- Cas du couplage étoile

Les 3 condensateurs de capacité C sont soumis à une tension V.
La puissance réactive fournie est $Q_C = 3.V^2.C\omega \rightarrow C = Q_C / 3.V^2.\omega$

La capacité s'exprime en Farad ou en microfarad µF

$$\boxed{\mathbf{C = \frac{P_{tot} (\operatorname{tg}\varphi_{tot} - \operatorname{tg}\varphi'_{tot})}{3.V^2.\omega}}}$$



- Cas du couplage triangle

Les 3 condensateurs de capacité C sont soumis à une tension U.
La puissance réactive fournie est $Q_C = 3.U^2.C\omega \rightarrow C = Q_C / 3.U^2.\omega$

La capacité s'exprime en Farad ou en microfarad µF

$$\boxed{\mathbf{C = \frac{P_{tot} (\operatorname{tg}\varphi_{tot} - \operatorname{tg}\varphi'_{tot})}{3.U^2.\omega}}}$$

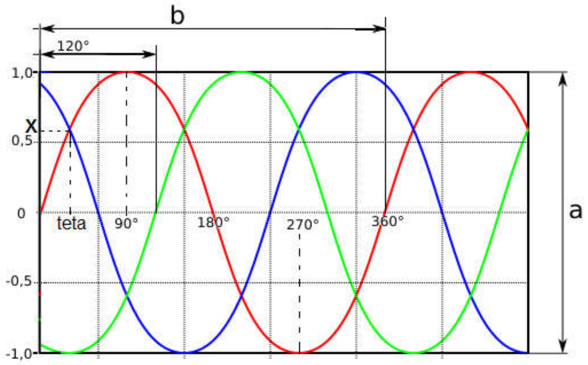
Le couplage triangle est préférable car la valeur des condensateurs est 3 fois moins importante.

Exercice

La fréquence est de 50 Hz
Déterminer 'X', 'teta' et l'instant 't' correspond à teta
Calculer le nombre complexe
y= (5∟0°) + (5∟-120°) + (5∟120°)

Exercice

Calculer les tensions composées U23 et U 31

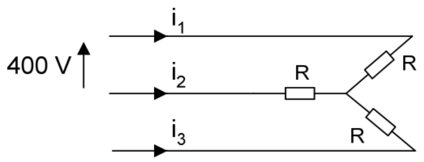


Exercice 01

Sur un réseau (230 V / 400 V, 50 Hz) sans neutre, on branche en étoile trois récepteurs capacitifs identiques de résistance R = 20Ω en série avec une capacité C = 20 µF.
1- Déterminer l'impédance complexe de chaque récepteur. Calculer son module et son argument.
2- Déterminer la valeur efficace des courants en ligne, ainsi que leur déphasage par rapport aux tensions simples.
3- Calculer les puissances active et réactive consommées par le récepteur triphasé, ainsi que la puissance apparente.

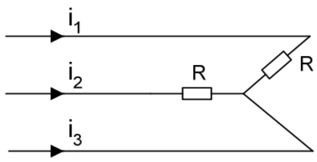
Exercice 02 :

1- Un réseau triphasé (U = 400 V entre phases, 50 Hz) alimente un récepteur résistif (couplage étoile sans neutre) : R = 50 Ω



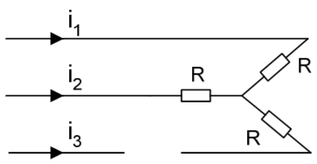
Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I1, I2, et I3. Calculer la puissance active P consommée par les trois résistances.

2- Un court-circuit a lieu sur la phase 3 :



Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I1 et I2.

3- La phase 3 est coupée :



Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I1, I2, et I3.

Exercice 03

Une usine absorbe 414 kVA d'une ligne triphasée à 2400 V. La charge est assez bien équilibrée, et le facteur de puissance est de 87,5 % (en retard) .Nous modélisons la charge de l'usine en la représentant par trois impédances raccordées en étoile
Déterminer :
a) l'impédance de l'usine, par phase
b) l'angle entre le courant de ligne et la tension ligne à neutre

c) le diagramme vectoriel complet de l'usine

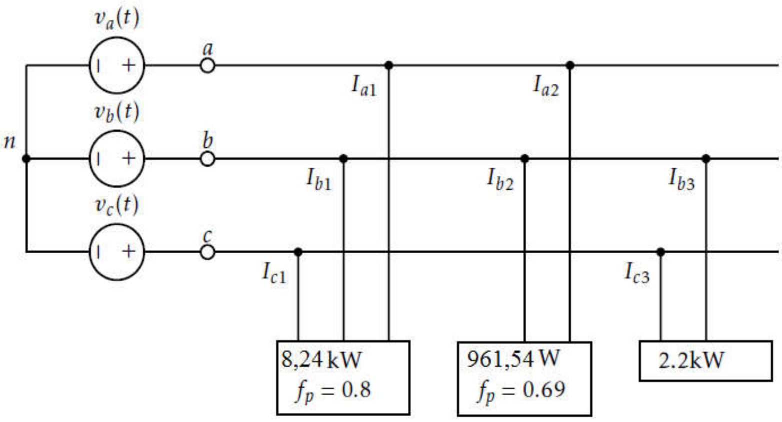
Exercice 04

Une source triphasée de 120V/phase a une impédance interne de $0{,}2+j0{,}5$. La source est branchée en Y. La charge Δ est branchée a travers une ligne d'impédance $0{,}3 + j0{,}9$. L'impédance de la charge est $118{,}5 + j85{,}8$.

1. Construire l'équivalent monophasé.
2. Calculer les courants de ligne *Ia; Ib; Ic*.
3. Calculer la tension aux bornes de la charge.
4. Calculer les courants de charge.
5. Calculer les tensions de ligne aux bornes de la source.

Exercice 05

Soit le circuit triphasé suivant, avec trois charges différentes :
1 moteur triphasé, 1 moteur monophasé, et 1 radiateur monophasé.
La référence est $V_a = 127∟0°$V. Quels sont les courants I_a, I_b et I_c ?



Exo01

Sur un réseau (230 V / 400 V, 50 Hz) sans neutre, on branche en étoile trois récepteurs capacitifs identiques de résistance R = 20 Ω en série avec une capacité C = 20 µF.

1- Déterminer l'impédance complexe de chaque récepteur. Calculer son module et son argument.

$$\underline{Z} = R - \frac{j}{C\omega}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = 160{,}4\,\Omega$$

$$\arg(\underline{Z}) = \arctan\left(-\frac{1}{RC\omega}\right) = -82{,}8°$$

2- Déterminer la valeur efficace des courants en ligne, ainsi que leur déphasage par rapport aux tensions simples.

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{230}{160{,}4} = 1{,}43\text{ A}$$

$$\varphi_{v/i} = -82{,}8°$$

3- Calculer les puissances active et réactive consommées par le récepteur triphasé, ainsi que la puissance apparente.

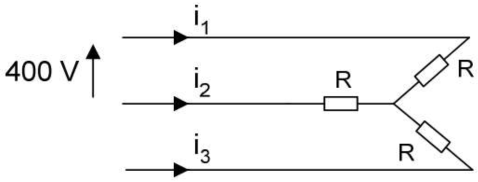
$$P = 3RI^2 = 123{,}3\text{ W}$$

$$Q = -3\frac{I^2}{C\omega} = -3\frac{I^2}{2\pi fC} = -981{,}6\text{ vars}$$

$$S = 3ZI^2 = 989{,}3\text{ VA}$$

Exo02

1- Un réseau triphasé (U = 400 V entre phases, 50 Hz) alimente un récepteur résistif (couplage étoile sans neutre) :



R = 50 Ω

Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I_1, I_2, et I_3.

$$I_1 = \frac{V}{R} = \frac{400}{\sqrt{3} \times 50} = 4{,}62 \text{ A}$$

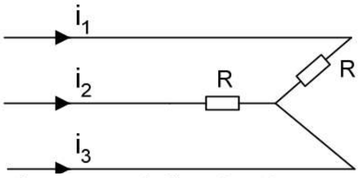
$I_2 = 4{,}62$ A

$I_3 = 4{,}62$ A

Calculer la puissance active consommée par les trois résistances :

$$P = \sqrt{3} U I \cos\varphi = \sqrt{3} \times 400 \times 4{,}62 \times 1 = 3200 \text{ W}$$

2- Un court-circuit a lieu sur la phase 3 :

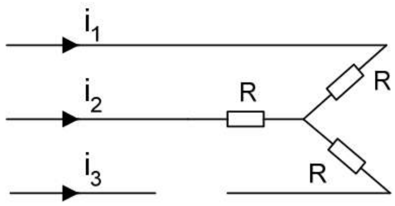


Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I_1 et I_2.

$I_1 = U/R = 400/50 = 8$ A

$I_2 = 8$ A

3- La phase 3 est coupée :



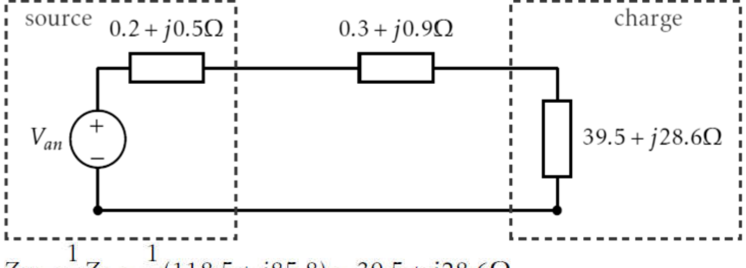
Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I_1, I_2, et I_3.

$$I_1 = \frac{U}{2R} = \frac{400}{2 \times 50} = 4 \text{ A}$$

$I_2 = 4$ A

$I_3 = 0$ A

Corr EXO4



$$Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta = \frac{1}{3}(118.5 + j85.8) = 39.5 + j28.6\Omega$$

2. Le courant $\mathbf{I}_a$

$$\mathbf{I}_a = \frac{120\angle 0}{(0.2 + 0.3 + 39.5) + j(0.5 + 0.9 + 28.6)} = \frac{120\angle 0}{40 + j30} = 2.4\angle(-36.87°) \text{ A}$$

$\mathbf{I}_b = 2.4\angle(-156.87°)$ A

$\mathbf{I}_c = 2.4\angle(83.13°)$ A

3. Puisque la charge est branchée en Δ, la tension aux bornes de la charge est la tension de ligne.

$$\mathbf{V}_{an} = I_a \cdot Z_Y = (2.4\angle(-36.87))(39.5 + j28.6)$$
$$= 117.04\angle(-0.96°) \text{ V}$$

On est en séquence directe,

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}\angle(30°)\mathbf{V}_{an} = 202.72\angle(29.04°) \text{ V}$$

Et pour les deux autres tensions :

$$\mathbf{V}_{bc} = 202.72\angle(-90.96°) \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 202.72\angle(149.04°) \text{ V}$$

4. Les courants de charge sont reliés aux courants de source par :

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{3}\angle(-30°)} I_a = 1.39\angle(-6.87°) \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_{bc} = 1.39\angle(-126.87°) \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_{ca} = 1.39\angle(113.13°) \text{ A}$$

On peut aussi utiliser :

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{Z_\Delta} = \frac{202.72\angle(29.04°)}{118.5 + j85.8} = 1.39\angle(-6.87°) \text{ A}$$

5. La tension aux bornes de la source peut être calculée à partir du circuit monophasé.

$$\mathbf{V}_{an} = (Z_{ligne} + Z_Y)\mathbf{I}_a$$
$$= (39.8 + j29.5)(2.4\angle(-36.87°))$$
$$= 118.9\angle(-0.32°) \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}\angle(30°)V_{an}$$
$$= 205.94\angle(29.68°) \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{bc} = 205.94\angle(-90.32°) \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 205.94\angle(149.68°) \text{ V}$$

Corr EXO 03

La tension par phase est:

$$E_{LN} = \frac{E_L}{\sqrt{3}} = \frac{2400}{\sqrt{3}} = 1386 \text{ V}$$

La puissance apparente par phase est:

$$S_{\text{par phase}} = \frac{S_{\text{totale}}}{3} = \frac{414 \text{ kVA}}{3} = 138 \text{ kVA}$$

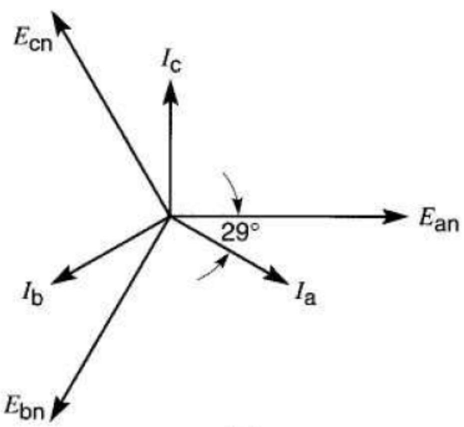
Le courant par phase est:

$$I = \frac{S_{\text{par phase}}}{E_{LN}} = \frac{138\ 000 \text{ VA}}{1386 \text{ V}} = 100 \text{ A}$$

d'où l'impédance par phase:

$$Z = \frac{E}{I} = \frac{1386 \text{ V}}{100 \text{ A}} = 13{,}9\ \Omega$$

b) L'angle entre le courant et la tension ligne à neutre est donné par:
φ = arccos (FP) = arccos 0,875 = 29°



Le courant est en retard sur E_{LN} de 29°, dans chaque phase.

EOX 05

P/η =P active absorbé (indiqué sur la figure)

Moteur 3ϕ :

$$V_{an} \rightarrow \text{référence de phase } = 127\angle 0°$$
$$P = VI\cos\phi \Rightarrow I = \frac{P/\eta}{3V\cos\phi} = 27.06 \text{ A}$$
$$\phi = \arccos(0.8) = 36.87°$$

On trouve donc que le courant est :

$$\mathbf{I}_{a1} = 27\angle(-37°) \text{ A}, \qquad \mathbf{I}_{b1} = 27\angle(-157°) \text{ A}, \qquad \mathbf{I}_{c1} = 27\angle(+83°) \text{ A}$$

Moteur 1ϕ :

$$I_{ab} = \frac{P/\eta}{V_l\cos\phi} = 6.34 \text{ A}$$
$$\phi = \arccos(0.69) = 46.4°$$
$$\mathbf{I}_{ab} = 6.34\angle(-46.4°)$$

P/η =P active absorbé (indiqué sur la figure)

On trouve donc que le courant est :

$$\mathbf{I}_{a2} = 6.34\angle(-16.4°), \qquad \mathbf{I}_{b2} = -\mathbf{I}_{a2} = 6.34\angle(163.6°), \qquad \mathbf{I}_{c2} = 0$$

Radiateur 1ϕ :

$$P = V_l I \Rightarrow I = \frac{P}{V_{bc}} = \frac{2200}{\sqrt{3}\cdot 127} = 10 \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_{b3} = 10\angle(-90° + 0°) = -j10 = -\mathbf{I}_{c3}$$

Puisque la tension V_{bc} est déphasée de $-90°$ par rapport à la tension de référence, il faut tenir compte de ce déphasage dans le calcul de la phase du courant.
Donc, si on somme les courants :

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{a1} + \mathbf{I}_{a2} = 27\angle(-37°) + 6.34\angle(-16.4°) = 33\angle(-33°) \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{b1} + \mathbf{I}_{b2} + \mathbf{I}_{b3} = 27\angle(-157°) + 6.34\angle(164°) - j10 = 36\angle(-149°) \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{c1} + \mathbf{I}_{c3} = 27\angle(83°) + j10 = 37\angle(85°) \text{ A}$$